

Teilbarkeitsregeln Primfaktorzerlegung

Trainingsaufgaben und Übungstexte
für Klasse 5 oder 6

Dieser Text setzt Grundkenntnisse über Teiler und Vielfache voraus.
Diese stehen im Text 10101.

Datei Nr. 10102

Friedrich W. Buckel

Stand 18. April 2016

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.schule

Vorwort

Dieser Text enthält viele Details zu diesem Thema, die bei Behandlung in Klassenstufe 5 und vielleicht auch in 6 sicher nicht alle verwendet werden. Man übergehe sie dann einfach.

Beachten Sie die Themenverteilung:

10101	Teiler Vielfache Mengen	(neuer Text)
10102	Teilbarkeitsregeln	(neuer Text)
10105	Übungen und Tests zur Teilbarkeit	(alter Text)
10110	Vielfache und Teiler	(alter Text)
10120	Potenzen - Training	
10121	Potenzen: Lernblatt	
10131	Mengenlehre 1	

Inhalt

1	Teilerketten	3
2	Teiler von Vielfachen	4
3	Teiler von Summen oder Differenzen	5
4	Teilbarkeitsregeln	7
5	Primzahlen	12
6	Training: Primfaktorzerlegung	14
	Potenzschreibweise	14
7	Teiler aus Primfaktoren bilden	15
8	Teiler von Teilern sind auch Teiler	17
9	Den ggT mit Primfaktoren berechnen	18
10	Das kgV mit Primfaktoren berechnen	20
11	ggT und kgV zugleich berechnen	22
12	Wann ist das kgV das Produkt beider Zahlen?	23
13	ggT und kgV zu 3 Zahlen	24
	Alle Aufgaben nochmals zusammengestellt:	26
	Lösungen zu allen Aufgaben	29 - 38

1 Teilerketten

Beispiel 1

$\boxed{3}$ ist ein Teiler von $\boxed{21}$,
 $\boxed{21}$ ist ein Teiler von $\boxed{105}$,
 Also ist auch $\boxed{3}$ ein Teiler von $\boxed{105}$.

denn es gilt: $21 = 3 \cdot 7$ (1)

denn es gilt: $105 = 21 \cdot 5$ (2)

Zum Beweis ersetzt man in (2) die Zahl 21 durch die Zerlegung aus (1):

$$\boxed{105} = 21 \cdot 5 = (3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5) = \boxed{3} \cdot 35$$

Weil $3 \mid 21$ und $21 \mid 105$, gilt $3 \mid 105$.

Das ist eine Teilerkette

Beispiel 2

$\boxed{11}$ ist ein Teiler von $\boxed{121}$,
 $\boxed{121}$ ist ein Teiler von $\boxed{1210}$,
 Also ist auch $\boxed{11}$ ein Teiler von $\boxed{1210}$.

denn es gilt: $121 = 11 \cdot 11$ (1)

denn es gilt: $1210 = 121 \cdot 10$ (2)

Zum Beweis ersetzt man in (2) die Zahl 121 durch die Zerlegung aus (1):

$$\boxed{1210} = 121 \cdot 10 = (11 \cdot 11) \cdot 10 = 11 \cdot (11 \cdot 10) = \boxed{11} \cdot 110$$

Weil $11 \mid 121$ und $121 \mid 1210$, gilt $11 \mid 1210$.

Das ist eine Teilerkette.

Aufgabe 1

Bilde Teilerketten wie in obigen Beispielen aus diesen Zahlen:

a) 4, 24, 72

b) 15, 735, 105

c) 108, 18, 54

Aufgabe 2

Warum kann man aus diesen Zahlen keine Teilerketten bilden?

a) 17, 51, 154

b) 7, 85, 140

c) 2, 168, 346

Aufgabe 3

Finde die mittlere Zahl, so dass die Aussagen wahr sind:

a) Weil $5 \mid \square$ und $\square \mid 135$, gilt $5 \mid 135$

b) Weil $12 \mid \square$ und $\square \mid 168$, gilt $12 \mid 168$

c) Weil $3 \mid \square$ und $\square \mid 99$, gilt $3 \mid 99$

2 Teiler von Vielfachen

Beispiel 3

- a) Wir überprüfen diese Überlegung:

$$3 \mid 39, \text{ also ist auch } 3 \mid 2 \cdot 39 \text{ d. h. } 3 \mid 78.$$

Dazu schreiben wir $39 = 3 \cdot 13$ und $78 = 2 \cdot 39$ und ersetzen in der letzten Gleichung

$$39 \text{ durch } 3 \cdot 13: 78 = \underbrace{(3 \cdot 13)}_{39} \cdot 2 = 3 \cdot (13 \cdot 2) = 3 \cdot 26, \text{ d. h. } 3 \mid 78.$$

- b) $3 \mid 39$, also ist auch $3 \mid 10 \cdot 39$ d. h. $3 \mid 390$.

Überprüfung: Es gilt:

$$39 = 3 \cdot 13 \text{ und } 390 = \underbrace{39}_{3 \cdot 13} \cdot 10 = (3 \cdot 13) \cdot 10 = 3 \cdot (13 \cdot 10) = 3 \cdot 130$$

Jetzt sieht man, dass 3 auch ein Teiler von 390 ist.

- c) $3 \mid 39$, also ist auch $3 \mid 20 \cdot 39$ d. h. $3 \mid 780$.

In Worten:

3 ist ein Teiler von 39, also auch ein Teiler vom 20-fachen, d. h. von 780.

Beispiel 4

- a) $8 \mid 40$, also ist auch $8 \mid 5 \cdot 40 = 200$.

In Worten

8 ist ein Teiler von 40, also auch vom Fünffachen von 40, also von 200.

- b) $8 \mid 40$, also ist auch $8 \mid 25 \cdot 40 = 1000$.

In Worten

8 ist ein Teiler von 40, also auch vom 25-fachen von 40, d. h. von 1000.

Beispiel 5

$$13 \mid 52, \text{ also auch } 13 \mid 3 \cdot 52 = 156$$

In Worten:

13 ist ein Teiler von 52, also auch ein Teiler von 156, denn 156 ist das Dreifache von 52:

Produktregel: Ist a ein Teiler von b , dann ist a auch ein Teiler von $c \cdot b$.
(a, b und c sollen natürliche Zahlen sein)

Aufgabe 4

Löse wie in Beispiel 5:

- | | | | |
|----|---------------------------|---|-------------------------|
| a) | 4 ist ein Teiler von 24. | Warum ist dann auch 4 ein Teiler von 120? | Und das Wie-viel-fache? |
| b) | 9 ist ein Teiler von 27. | Warum ist dann auch 9 ein Teiler von 270? | Und das Wie-viel-fache? |
| c) | 12 ist ein Teiler von 36. | Warum ist dann auch 12 ein Teiler von 180? | Und das Wie-viel-fache? |
| d) | 27 ist ein Teiler von 81. | Warum ist dann auch 27 ein Teiler von 8100? | Und das Wie-viel-fache? |
| e) | 15 ist ein Teiler von 45. | Warum ist dann auch 15 ein Teiler von 900? | Und das Wie-viel-fache? |

Aufgabe 5

Welche Aussagen sind wahr? Begründe deine Antwort. Vorsicht bei g und h.

- | | | | | | | | |
|----|------------------------|----|------------------------|----|----------------------|----|-----------------------|
| a) | $24 \mid 13 \cdot 96$ | b) | $15 \mid 4 \cdot 25$ | c) | $7 \mid 56 \cdot 57$ | d) | $11 \mid 111 \cdot 3$ |
| e) | $12 \mid 144 \cdot 68$ | f) | $13 \mid 54 \cdot 169$ | g) | $18 \mid 9 \cdot 26$ | h) | $14 \mid 35 \cdot 40$ |

3 Teiler von Summen oder Differenzen

Beispiel 6

12 ist ein Teiler von 600 ($\boxed{12} \cdot \boxed{50} = 600$) und

12 ist ein Teiler von 24 ($\boxed{12} \cdot \boxed{2} = 24$) also folgt:

12 ist auch ein Teiler von $600 + 24 = 624$ ($\boxed{12} \cdot \boxed{50 + 2} = \boxed{12} \cdot \boxed{52} = 624$) (Summenregel)

12 ist auch ein Teiler von $600 - 24 = 576$ ($\boxed{12} \cdot \boxed{50 - 2} = \boxed{12} \cdot \boxed{48} = 576$) (Differenzenregel)

Summenregel: Ist a ein Teiler von b und von c, dann auch von $b + c$.

Differenzenregel: Ist a ein Teiler von b und von c, dann auch von $b - c$.

Folgerungen:

- a) Ist 12 ein Teiler von 624? Man zerlegt 624 in die Summe $600 + 24$:

12 ist ein Teiler von 600 und ein Teiler von 24, also auch ein Teiler der Summe 624!

$$624 = \underbrace{600}_{50 \cdot 12} + \underbrace{24}_{2 \cdot 12} = 52 \cdot 12$$

12 geht in 600 50-mal und in 24 2-mal, in 624 also $50 + 2 = 52$ -mal.

- b) Ist 12 ein Teiler von 576? Man zerlegt 576 in die Differenz $600 - 24$:

12 ein Teiler von 600 und von 24, also auch ein Teiler der Differenz!

$$576 = \underbrace{600}_{50 \cdot 12} - \underbrace{24}_{2 \cdot 12} = 48 \cdot 12$$

12 geht in 600 50-mal und in 24 2-mal, also in 576 $50 - 2 = 48$ -mal.

Beispiel 7

Ist 8 ein Teiler von 1032? Man zerlegt 1032 in $1000 + 32$ und weiß (hoffentlich), dass gilt:

$125 \cdot 8 = 1000$ und $4 \cdot 8 = 32$:

$$1032 = \underbrace{1000}_{125 \cdot 8} + \underbrace{32}_{4 \cdot 8} = 129 \cdot 8$$

8 ist ein Teiler von 1000 und von 32, also auch ein Teiler von $1000 + 32 = 1032$.

8 geht in 1032 $125 + 4 = 129$ -mal.

Beispiel 8

Ist 18 ein Teiler von 3690? Wir zerlegen 3690 in eine geeignete Summe: $3690 = 3600 + 90$:

$$3690 = \underbrace{3600}_{200 \cdot 18} + \underbrace{90}_{5 \cdot 18} = 205 \cdot 18$$

Also teilt 18 die Zahl 3690 genau $200 + 5 = 205$ -mal.

Beispiel 9

Ist 35 ein Teiler von 805?

$$805 = \underbrace{700}_{20 \cdot 35} + \underbrace{105}_{3 \cdot 35} = 23 \cdot 35$$

Also ist 35 ein Teiler von 805 und geht 23-mal in 805.